ISSN (print) 2312–4547, ISSN (on-line) 2415–7325.
ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". 2016. Вип. 8, № 8. С. 192–203
DOI 10.15421/141609

УДК 517.977.56

НЕОБХІДНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ, РОЗВ'ЯЗКИ ЯКИХ МАЮТЬ НЕВАРІАЦІЙНИЙ ХАРАКТЕР

С. О. Горбонос

Дніпропетровський національний університет, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010 Дніпропетровськ, E-mail: gorbonos.so@gmail.com

Представлено проф. Капустяном В. О.

Отримано необхідні умови оптимальності для одного класу задач оптимального керування параболічними рівняннями з необмеженими коефіцієнтами у випадку, коли їх розв'язки мають неваріаційний характер.

Ключові слова: задача оптимального керування, неваріаційний розв'язок, функціонал Лагранжа, необхідні умови оптимальності.

1. Вступ

У роботі розглянуто клас задач оптимального керування лінійними параболічними рівняннями з необмеженими коефіцієнтами в головній частині диференціального оператора. Особливість такого класу задач керування полягає в тому, що коефіцієнти параболічних рівнянь не задовольняють класичні умови леми Лакса – Мільграма. На сьогодні теорія оптимального керування такими об'єктами активно розвивається, оскільки багато важливих питань у цій області є недослідженими повною мірою. В роботі [1] було отримано достатні умови, за яких наведений клас задач оптимального керування має єдиний розв'язок. Крім того, було встановлено, що оптимальний розв'язок таких задач може мати або варіаційний характер, або неваріаційний [1–3]. Також, залучаючи принципи фіктивних граничних керувань, було побудовано апроксимацію наведеної задачі керування для випадку неваріаційного розв'язку [2]. Таким чином, мета даної роботи полягала в побудові необхідних умов оптимальності для наведеного класу задач керування у випадку, коли їх розв'язки мають неваріаційний характер.

2. Постановка задачі та допоміжні результати

Основним об'єктом дослідження виступає задача пошуку оптимального керування для параболічного рівняння з необмеженими коефіцієнтами:

$$y_t - div(\nabla y + A(x)\nabla y) = f \quad \text{на} \quad \Omega \times [0,T] \tag{2.1}$$

$$y = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times [0,T], \quad \partial y/\partial \nu_A = u \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \times [0,T], \tag{2.2}$$

$$y(t_0, x) = y_0 \ \in L^2(\Omega) \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{2.3}$$

$$I(u,y) = \|y - y_d\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + \|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))} \to \inf, \tag{2.4}$$

де $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$, $A(x) \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ — кососиметрична матриця, тобто $a_{ij} = -aji$ і $a_{ii} = 0$.

Надалі через $L^p([0,T],V)$ будемо позначати множину усіх вимірних функцій $u : [0,T] \to V$ таких, що

$$\|u\|_{L^p([0,T],V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p_V \, dt \right)^{1/p} < \infty,$$

де $1 \leqslant p < \infty$, а інтеграл наведено в сенсі Бохнера.

Тепер наведемо означення неваріаційного розв'язку для задачі (2.1)–(2.4):

Означення 2.1. Пару $(u^*, y^*) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ називатимемо неваріаційним розв'язком задачі оптимального керування (2.1)–(2.4), якщо

$$I(u^*, y^*) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y), \quad (u^*, y^*) \in \Xi$$

і має місце нерівність

$$\|y^*\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + \frac{1}{2}\|y^*(T)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \neq$$
$$\neq \int_0^T \langle f, y^* \rangle_{H^{-1}(\Omega),H^1_0(\Omega)} \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} u^* y^* \, d\mathcal{H}^{N-1} \, dt + \frac{1}{2}\|y_0\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

Для побудови схеми апроксимації неваріаційних розв'язків у роботі [2] до матриці потоку $A \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ було застовано оператор зрізки $T_\varepsilon : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$. Оператор T_ε задається таким чином:

$$T_\varepsilon(A) = [T_\varepsilon(a_{ij})]^N_{i,j=1},$$

де ε — малий параметр, який змінюється в строго спадній послідовності додадних дійсних чисел, що прямує до 0; T_ε — функція зрізки така, що

$$T_\varepsilon(s) = \max\{\min\{s, \varepsilon^{-1}\}, -\varepsilon^{-1}\}.$$

У результаті, отримано набір множин Ω_ε, з якими пов'язано таку послідовність задач оптимального керування:

$$\left\{ \left\langle \inf_{(u,v,y)\in\Xi_\varepsilon} I_\varepsilon(u,v,y) \right\rangle, \varepsilon \to 0 \right\}, \tag{2.5}$$

де

$$I_\varepsilon(u,v,y) = \|y - y_d\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega_\varepsilon))} + \|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))} + \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \|v\|^2_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))}, \tag{2.6}$$

$$\Xi_\varepsilon = \left\{ (u,v,y) \;\middle|\; \begin{aligned} y_t - \operatorname{div}(\nabla y + A(x)\nabla y) = f \quad &\text{на} \quad \Omega_\varepsilon \times [0,T], \\ y = 0 \quad &\text{на} \quad \Gamma_1 \times [0,T], \\ \partial y/\partial \nu_A = u \quad &\text{на} \quad \Gamma_2 \times [0,T], \\ \partial y/\partial \nu_A = v \quad &\text{на} \quad \Gamma_\varepsilon \times [0,T], \\ y(t_0,x) = y_0 \ \in L^2(\Omega) \quad &\text{на} \quad \Omega_\varepsilon, \end{aligned} \right\}. \tag{2.7}$$

Тут $y \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega_\varepsilon))$, $y_d \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ та $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ — задані функції; $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$ — керування; ν — зовнішня нормаль одиничного вектора на Γ_2 і Γ_ε; $v \in L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))$ — фіктивне керування; α — додатне число таке, що

$$\varepsilon^{-\alpha}\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_\varepsilon) \to 0 \quad \text{коли} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.8}$$

Зауваження 2.1. У результаті застосування оператора зрізки отримано додаткові границі Γ_ε. Для того щоб забезпечити коректність таких задач, означено додаткові неоднорідні крайові умови типу Неймана. В якості неоднорідності виступає фіктивне керування v, яке обрано як розподілення простору $L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))$. Беручи до уваги результати, отримані в [1], і той факт, що $A \in L^\infty(\Omega_\varepsilon;\mathbb{S}^N)$, маємо: для будь-якого $\varepsilon > 0$ відповідна задача оптимального керування (2.5) має принаймні один розв'язок $(u^0_\varepsilon, v^0_\varepsilon, y^0_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon$.

Далі наведемо означення, необхідне для подальшого дослідження:

Означення 2.2. [4] Будемо казати, що матриця $A \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ Q-типу, якщо існує строго спадаюча послідовність $\varepsilon \to 0$ додатних дійсних чисел така, що відповідний набір множин $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, має такі властивості:

(a) Ω_ε — відкриті зв'язні підмножини Ω з межами Ліпшиця, для яких існує $\delta > 0$ таке, що $\partial\Omega \subset \partial\Omega_\varepsilon$ і $\operatorname{dist}(\Gamma_\varepsilon, \partial\Omega) > \delta$ для будь-якого $\varepsilon > 0$, де $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \setminus \partial\Omega$.

(b) поверхнева міра дірок $Q_\varepsilon = \Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ є достатньо малою в такому розумінні:

$$\mathcal{H}^{N-1}(\Gamma_\varepsilon) = o(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

(c) для $\forall h \in D$ існує стала $c(h)$, яка залежить від h і не залежить від ε, така, що

$$\left|\int_0^T \int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} (\nabla\varphi, A(x)\nabla h)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt\right| \leqslant c\sqrt{\frac{|\Omega\setminus\Omega_\varepsilon|}{\varepsilon}}\left(\int_0^T \int_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} |\nabla\varphi|^2_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt\right)^{1/2}$$

для усіх $\varphi \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$.

3. Необхідні умови оптимальності

Для того щоб отримати необхідні умови оптимальності для задачі (2.1)–(2.4), розглянемо спочатку задачі умовної мінімізації (2.5). А саме, отримаємо необхідні умови оптимальності для задач (2.5) та проведемо аналіз поведінки цих умов, коли $\varepsilon \to 0$. Як випливає із зауваження 2.1, задача оптимального керування (2.5) для кожного $\varepsilon > 0$ є коректною керованою систетою. Отже, для того щоб отримати необхідні умови оптимальності для цієї задачі, застосуємо такий результат:

Теорема 3.1. *[5] Нехай Y, U і V — банахові простори, нехай $J : Y \times U \to \overline{\mathbb{R}}$ — функціонал якості, $F : Y \times U \to V$ — відображення, U_∂ це опукла підмножина простору U, яка містить більше ніж одну точку. Нехай $(\widehat{u}, \widehat{y}) \in U \times Y$ це розв'язок задачі*

$$J(u, y) \to \inf, \quad F(u, y) = 0, \quad u \in U_\partial.$$

Нехай для кожного $u \in U_\partial$ відображення $y \mapsto J(u, y)$ і $y \mapsto F(u, y)$ неперервно-диференційовні для $y \in \mathcal{O}(\widehat{y})$, де $\mathcal{O}(\widehat{y})$ — деякий окіл точки $\widehat{y}$. Також нехай для $y \in \mathcal{O}(\widehat{y})$ фукція $u \mapsto J(u, y)$ є опуклою, функціонал J диференційований за Гато відносно u в точці $(\widehat{u}, \widehat{y})$, відображення $u \mapsto F(u, y)$ неперервне з U в Y і аффінне, тобто

$$F(\gamma u_1 + (1-\gamma)u_2, y) = \gamma F(u_1, y) + (1-\gamma)F(u_2, y), \quad \forall u_1, u_2 \in U, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Тоді існує пара $(\lambda, p) \in (R_+ \times V^*)$ така, що

$$\langle \mathcal{L}'_y(\widehat{u}, \widehat{y}, \lambda, p), h\rangle_{Y^*;Y} = 0, \quad \forall h \in Y, \tag{3.1}$$

$$\langle \mathcal{L}'_u(\widehat{u}, \widehat{y}, \lambda, p), u\rangle_{U^*;U} \geq 0, \quad \forall u \in U_\partial - \widehat{u}, \tag{3.2}$$

де функціонал Лагранжа $\mathcal{L}$ визначається рівністю

$$\mathcal{L}(u, y, \lambda, p) = \lambda J(u, y) + \langle p, F(u, y)\rangle_{U^*;U}. \tag{3.3}$$

Якщо $Im F'_y(\widehat{u}, \widehat{y}) = V$, тоді можна припустити, що $\lambda = 1$ в (3.1)–(3.2).

Оскільки наступна задача для $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$, $v \in L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))$

$$y_t - \operatorname{div}(\nabla y + A(x)\nabla y) = f \quad \text{на} \quad \Omega_\varepsilon \times [0,T],$$

$$y = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times [0,T],$$

$$\partial y/\partial \nu_A = u \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \times [0,T],$$

$$\partial y/\partial \nu_A = v \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon \times [0,T],$$

$$y(t_0,x) = y_0 \ \in L^2(\Omega) \quad \text{на} \quad \Omega_\varepsilon$$

має єдиний розв'язок $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon))$ [6], то $ImF'_y(\widehat{u},\widehat{y}) = V$, тут $V = L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))\times \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))$. Таким чином, припущення теореми 3.1 виконуються і фукціонал Лагранжа у нашому випадку матиме вигляд:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\varepsilon(u,v,y,p_1,p_2,p_3) &= \|y-y_d\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon))} + \|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))}\\ &+ \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\|v\|^2_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))} + \int_0^T (y_t - \operatorname{div}(\nabla y + A(x)\nabla y) - f, p_1)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\,dt\\ &+ \int_0^T \left\langle \frac{\partial y}{\partial \nu_A} - u, p_2\right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2));H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2))} dt\\ &+ \int_0^T \left\langle \frac{\partial y}{\partial \nu_A} - v, p_3\right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon));H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))} dt, \end{aligned} \tag{3.4}$$

де $p = (p_1,p_2,p_3) \in L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))\times \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))$.

Враховуючи вищесказане, в наступному результаті встановлено необхідні умови оптимальності для задач умовної оптимізації (2.5):

Теорема 3.2. *Нехай для заданого* $\varepsilon > 0$ *трійка* $(u^0_\varepsilon, v^0_\varepsilon, y^0_\varepsilon) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))\times$ $\times L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))\times L^2(0,T;H^1_0(\Omega_\varepsilon))$ *є оптимальним розв'язком задачі* (2.5). *Припустимо, що виконується така умова*

$$\operatorname{div}\ \left((A(x))\,\nabla y^0_\varepsilon\right) \in L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)). \tag{3.5}$$

Тоді існує елемент $p_\varepsilon \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega_\varepsilon))$ *такий, що елементи* u^0_ε, v^0_ε, y^0_ε, p_ε,

$\gamma^0_{\Gamma_\varepsilon}(p_\varepsilon)$, $\gamma^0_{\Gamma_2}(p_\varepsilon)$) *задовольняють дану систему співвідношень*

$$(y^0_\varepsilon)'_t - \operatorname{div}\left(\nabla y^0_\varepsilon + A(x)\nabla y^0_\varepsilon\right) = f \quad \textit{на} \;\; \Omega_\varepsilon \times [0,T], \tag{3.6}$$

$$y^0_\varepsilon = 0 \quad \textit{на}\; \Gamma_1 \times [0,T], \tag{3.7}$$

$$\partial y^0_\varepsilon/\partial\nu_A = u^0_\varepsilon \quad \textit{на}\; \Gamma_2 \times [0,T], \tag{3.8}$$

$$\partial y^0_\varepsilon/\partial\nu_A = v^0_\varepsilon \quad \textit{на}\; \Gamma_\varepsilon \times [0,T], \tag{3.9}$$

$$y^0_\varepsilon(t_0,x) = y_0 \in L^2(\Omega) \quad \textit{на}\; \Omega_\varepsilon, \tag{3.10}$$

$$(p_\varepsilon)'_t + \operatorname{div}\left(\left(I + A^t\right)\nabla p_\varepsilon\right) = 2\left(y^0_\varepsilon - y_d\right), \quad \textit{м.с. на} \;\; \Omega_\varepsilon \times [0,T], \tag{3.11}$$

$$p_\varepsilon = 0 \quad \textit{на}\; \Gamma_1 \times [0,T], \tag{3.12}$$

$$\partial p_\varepsilon/\partial\nu_{I+A^t} = 0 \quad \textit{на}\; \Gamma_2 \times [0,T], \tag{3.13}$$

$$\partial p_\varepsilon/\partial\nu_{I+A^t} = 0 \quad \textit{на}\; \Gamma_\varepsilon \times [0,T], \tag{3.14}$$

$$p_\varepsilon(T,0) = 0 \quad \textit{на}\; \Omega_\varepsilon, \tag{3.15}$$

$$u^0_\varepsilon = \Lambda_{L^2(0,T;H^{\frac12}(\Gamma_2))}\gamma^0_{\Gamma_2}(p_\varepsilon), \tag{3.16}$$

$$v^0_\varepsilon = \frac{\varepsilon^\sigma}{2}\Lambda_{L^2(0,T;H^{\frac12}(\Gamma_\varepsilon))}\gamma^0_{\Gamma_\varepsilon}(p_\varepsilon), \tag{3.17}$$

$$2\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}(u^0_\varepsilon,u)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt \ge \int\limits_0^T \langle u,p_\varepsilon\rangle_{H^{-\frac12}(\Gamma_2));H^{\frac12}(\Gamma_2))}\,dt, \tag{3.18}$$

для будь-якого $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$, *де* $\gamma^0_{\Gamma_2} : H^1_0(\Omega_\varepsilon) \to H^{\frac12}(\Gamma_2)$ *і* $\gamma^0_{\Gamma_\varepsilon} : H^1_0(\Omega_\varepsilon) \to H^{\frac12}(\Gamma_\varepsilon)$ *— оператори сліду,* $\Lambda_{L^2(0,T;H^{\frac12}(\Gamma_2))}$ *і* $\Lambda_{L^2(0,T;H^{\frac12}(\Gamma_\varepsilon))}$ *— канонічні ізоморфізми з* $L^2(0,T;H^{\frac12}(\Gamma_2))$ *в* $L^2(0,T;H^{-\frac12}(\Gamma_2))$ *та* $L^2(0,T;H^{\frac12}(\Gamma_\varepsilon))$ *в* $L^2(0,T;H^{-\frac12}(\Gamma_\varepsilon))$ *відповідно.*

Доведення. Згідно з теоремою 3.1, існує трійка $p = (p_1,p_2,p_3) \in L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))\times L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0,T;H^{-\frac12}(\Gamma_\varepsilon))$ така, що функціонал Лагранжа $\mathcal{L}$ задовольняє співвідношення (3.1)–(3.2). В результаті, враховуючи (3.4), умова (3.1) матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathcal{D}_y\,\widehat{L}_\varepsilon(u^0_\varepsilon,v^0_\varepsilon,y^0_\varepsilon,p_1,p_2,p_3),h\right\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_\varepsilon));L^2(0,T;H^1_0(\Omega_\varepsilon))} \\
&\qquad = 2\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\left(y^0_\varepsilon - y_d\right)h\,dx\,dt + \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon} h'_t p_1\,dx\,dt \\
&- \int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\operatorname{div}\left(\nabla h + A(x)\nabla h\right)p_1\,dx\,dt + \int\limits_0^T\left\langle\frac{\partial h}{\partial\nu_A},p_2\right\rangle_{H^{-\frac12}(\Gamma_2));H^{\frac12}(\Gamma_2))}dt \\
&\qquad\qquad + \int\limits_0^T\left\langle\frac{\partial h}{\partial\nu_A},p_3\right\rangle_{H^{-\frac12}(\Gamma_\varepsilon));H^{\frac12}(\Gamma_\varepsilon))}dt = 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

для будь-якого $h \in L^2(0,T;H^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon))$. Як наслідок з (3.19) і (3.5), для будь-якого $h \in L^2(0,T;C_0^\infty(\Omega_\varepsilon))$ отримаємо таку рівність

$$\begin{aligned} 2\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \big(y_\varepsilon^0 - y_d\big)\, h\, dx\, dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} h_t' p_1\, dx\, dt \\ - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div}\big(\nabla h + A(x)\nabla h\big) p_1\, dx\, dt = 2\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \big(y_\varepsilon^0 - y_d\big)\, h\, dx\, dt \\ - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (p_1)_t' h\, dx\, dt - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div}\big((I + A^t(x))\nabla p_1\big) h\, dx\, dt = 0. \quad (3.20) \end{aligned}$$

У свою чергу, із (3.5) і (3.20) слідує, що div $((A(x))\,\nabla p_1) \in L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))$. Звідси $A^t \nabla p_1 \in H(\Omega_\varepsilon; \operatorname{div})$, де

$$H(\Omega_\varepsilon; \operatorname{div}) = \left\{\xi \mid \xi \in L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)),\ \operatorname{div}\xi \in L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))\right\}.$$

Беручи до уваги властивості Ліпшиця межі $\partial\Omega_\varepsilon$, можна зробити висновок [6, 7], що $\partial p_1/\partial\nu_{A^t} \in L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\varepsilon))$, а відображення $A^t\nabla p_1 \in H(\Omega_\varepsilon; \operatorname{div}) \mapsto \frac{\partial p_1}{\partial \nu_{A^t}} \in L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_\varepsilon))$ є лінійним і неперервним. Крім того, якщо $h \in L^2(0,T;H^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon))$ і $A^t\nabla p_1 \in H(\Omega_\varepsilon; \operatorname{div})$, то має місце формула Гріна

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div}\big((I + A)\nabla h\big) p_1\, dx\, dt = -\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div}\big((I + A)\nabla p_1\big) h\, dx\, dt \\ -\int_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_{I+A}}, \gamma^0_{\partial\Omega_\varepsilon}(p_1) \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega_\varepsilon); H^{\frac{1}{2}}(\Omega_\varepsilon)} dt + \int_0^T \left\langle \frac{\partial p_1}{\partial \nu_{I+A^t}}, h \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} dt \\ + \int_0^T \left\langle \frac{\partial p_1}{\partial \nu_{I+A^t}}, h \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)} dt. \end{aligned}$$

Далі, комбінуючи це співвідношення з (3.19)–(3.20), отримаємо рівність:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{D}_y\, \widehat{L}_\varepsilon(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0, p_1, p_2, p_3), h \right\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_\varepsilon)); L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon))} \\ = \int_0^T \left\langle \frac{\partial p_1}{\partial \nu_{I+A^t}}, h \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} dt + \int_0^T \left\langle \frac{\partial p_1}{\partial \nu_{I+A^t}}, h \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)} dt \\ -\int_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_{I+A}}, \gamma^0_{\partial\Omega_\varepsilon}(p_1) \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega_\varepsilon); H^{\frac{1}{2}}(\Omega_\varepsilon)} dt + \int_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_A}, p_2 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2))} dt \\ + \int_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_A}, p_3 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)); H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))} dt = 0, \quad (3.21) \end{aligned}$$

яка має місце для кожного $h \in L^2(0,T;H^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon))$ і для кожного $p = (p_1, p_2, p_3)$ такого, що p_1 задовольняє (3.20) і $A^t \nabla p_1 \in H(\Omega_\varepsilon, \operatorname{div})$ та

$$(p_1, p_2, p_3) \in L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)) \times \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)).$$

Із (3.21) випливає, що для кожного $h \in L^2(0,T;C_0^\infty(\Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_2)) \cap L^2(0,T;C_0(\partial\Omega)) \subset L^2(0,T;H^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon))$ має місце рівність

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_{I+A^t}}, \gamma^0_{\partial\Omega}(p_1) \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega);H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = 0.$$

Так як $C_0^\infty(\Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_2) \cap C_0(\partial\Omega)$ є щільною в $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, то

$$\gamma^0_{\partial\Omega\setminus\Gamma_2}(p_1) = 0. \tag{3.22}$$

Отже, для кожного $h \in L^2(0,T;C_0^\infty(\Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_2))$ рівність (3.21) матиме такий вигляд:

$$\int\limits_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_A}, p_2 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2));H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2))} dt - \int_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_{I+A}}, \gamma^0_{\partial\Gamma_2}(p_1) \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2));H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2))} dt = 0, \tag{3.23}$$

аналогічно для кожного $h \in L^2(0,T;C_0^\infty(\Gamma_\varepsilon)$

$$\int\limits_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_A}, p_2 \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon));H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))} dt - \int_0^T \left\langle \frac{\partial h}{\partial \nu_{I+A}}, \gamma^0_{\partial\Gamma_\varepsilon 2}(p_1) \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon));H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon))} dt = 0. \tag{3.24}$$

Враховуючи той факт, що відображення $\partial/\partial\nu_A : H^2(\Omega_\varepsilon) \cap H_0^1(\Omega_\varepsilon) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2) \cup H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)$ є ізоморфізмом [8], з (3.23)–(3.24) випливає, що

$$\gamma^0_{\Gamma_2}(p_1) = p_2, \quad \gamma^0_{\Gamma_\varepsilon}(p_1) = p_3. \tag{3.25}$$

Таким чином, враховуючи (3.23) і (3.25), співвідношення (3.21) матиме вигляд:

$$\left\langle \mathcal{D}_y \widehat{L}_\varepsilon(u^0_\varepsilon, v^0_\varepsilon, y^0_\varepsilon, p_1, p_2, p_3), h \right\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_\varepsilon));L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon))}$$
$$= \int_0^T \left\langle \frac{\partial p_1}{\partial \nu_{I+A^t}}, h \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2);H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)} dt + \int_0^T \left\langle \frac{\partial p_1}{\partial \nu_{I+A^t}}, h \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon);H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\varepsilon)} dt = 0,$$

для усіх $h \in L^2(0,T;H^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon))$. Далі, застосовуючи такі самі міркування, приходимо до висновку:

$$\frac{\partial p_1}{\partial \nu_{I+A^t}} = 0 \quad \text{на} \ \ \Gamma_2, \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \nu_{I+A^t}} = 0 \quad \text{на} \ \ \Gamma_\varepsilon \tag{3.27}$$

У результаті, враховуючи співвдношення (3.19), (3.22), і (3.26)–(3.27), отримаємо крайову задачу (3.11)–(3.15). Як наслідок із властивостей розв'язків задачі (3.11)–(3.15), отримаємо, що $p_\varepsilon \in L^2(0,T;H^2(\Omega_\varepsilon)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon))$ [9].

Врешті залишилося показати, що мають місце співвідношення (3.16)–(3.18). У нашому випадку умова (3.2) матиме вигляд:

$$\big(\mathcal{D}_u \mathcal{L}(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0, p_\varepsilon, \gamma_{\Gamma_2}^0(p_\varepsilon), \gamma_{\Gamma_\varepsilon}^0(p_\varepsilon)), u\big)_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \geqslant 0, \quad \forall\, u \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

$$2\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (u_\varepsilon^0, u)_{\mathbb{R}^N}\, dx\, dt \geq \int\limits_0^T \langle u, p_\varepsilon \rangle_{H^{-\frac12}(\Gamma_2));H^{\frac12}(\Gamma_2))}\, dt, \quad \forall\, u \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Для того щоб отримати умови (3.16)–(3.17), застосуємо такий факт: простір $H^{\frac12}(\Gamma_2)$ і $H^{\frac12}(\Gamma_\varepsilon)$ можна звести до гільбертового простору відносно відповідної еквівалентної норми. У нашому випадку простір $H^{-\frac12}(\Gamma_2)$ і $H^{-\frac12}(\Gamma_\varepsilon)$ є дуальними гільбертовими просторами до вищенаведених [6]. □

Тепер перейдемо до аналізу асимптотичної поведінки системи оптимальності (3.6)–(3.18), коли $\varepsilon \to 0$. Але спочатку припустимо, що виконуються такі гіпотези:

(a) Існує оптимальна пара $(u^0, y^0) \in \Xi$ для задачі оптимального (2.1)–(2.4) така, що $y^0 \in D$. Тут D — це множина елементів $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ таких, що

$$\left| \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y)_{\mathbb{R}^N}\, dx\, dt \right| \leqslant c(y) \left(\int\limits_0^T \int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^2\, dx\, dt \right)^{1/2}$$

для будь-якого $\varphi \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$.

(b) Для кожного $\varepsilon > 0$ білінійна форма

$$[y,\varphi] = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y)_{\mathbb{R}^N}\, dx\, dt \ \ \forall y \in D, \forall \varphi \in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$$

є неперервною в такому розумінні:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [y_\varepsilon, p_\varepsilon] = [y, p\,]. \tag{3.28}$$

Тут $\{p_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon))$, $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon))$, $y_\varepsilon \rightharpoonup y$ в $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $p_\varepsilon \to p$ в $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, і $y, y_\varepsilon \in D$ для достатньо малого $\varepsilon > 0$.

(c) Нехай $\left\{(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0, p_\varepsilon)\right\}_{e>0}$ — послідовність така, що для кожного $\varepsilon > 0$ відповідний набір елементів $(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0, p_\varepsilon)$ задовольняє систему оптимальності (3.6)–(3.18). Тоді існує послідовність операторів продовження $\left\{P_\varepsilon \in \mathcal{L}\left(L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon)), L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\right)\right\}_{\varepsilon>0}$ і елемент $\overline{\psi}$:

$$P_\varepsilon(p_\varepsilon) \to \overline{\psi} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad \text{сильно в } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad \text{і} \quad \overline{\psi} \in D.$$

У наступному результаті показано, що граничний перехід у системі оптимальності (3.6)–(3.18) для задач (2.5), коли $\varepsilon \to 0$, призводить до необхідних умов оптимальності задачі (2.1)–(2.4).

Теорема 3.3. *Нехай $A \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^N)$ матриця Q-типу, $y_d \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $u_d \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$ і $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ — задані розподілення. Нехай $\left\{(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon\right\}_{\varepsilon>0}$ — це послідовність оптимальних розв'язків задач оптимального керування (2.5), а пара $(u^0, y^0) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \times D$ є варіаційною границею цієї послідовності. Нехай $\left\{p_\varepsilon^0 \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_\varepsilon))\right\}_{\varepsilon>0}$ послідовність відповідних спряжених станів. Тоді виконання гіпотез (a)–(c) означає, що $(u^0, y^0) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2)) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ є оптимальною парою задачі (2.1)-(2.4) і існує елемент $\overline{\psi} \in H_0^1(\Omega)$ такий, що*

$$(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0) \overset{Var}{\to} (u^0, y^0) \quad \text{коли } \varepsilon \to 0, \tag{3.29}$$

$$P_\varepsilon(p_\varepsilon) \to \overline{\psi} \quad \text{сильно в } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{3.30}$$

$$\left.\begin{aligned} (y^0)_t' - \operatorname{div}\left(\nabla y^0 + A(x)\nabla y^0\right) &= f \quad \text{на } \Omega \times [0,T], \\ y^0 &= 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \times [0,T], \\ \partial y^0/\partial \nu_A &= u^0 \quad \text{на } \Gamma_2 \times [0,T], \\ y^0(t_0,x) &= y_0 \in L^2(\Omega) \quad \text{на } \Omega, \end{aligned}\right. \tag{3.31}$$

$$\left.\begin{aligned} (\overline{\psi})_t' + \operatorname{div}\left(\left(I + A^t\right)\nabla\overline{\psi}\right) &= 2\left(y_\varepsilon^0 - y_d\right), \quad \text{на } \Omega \times [0,T], \\ \overline{\psi} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \times [0,T], \\ \partial\overline{\psi}/\partial\nu_{I+A^t} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_2 \times [0,T], \\ \overline{\psi}(T,0) &= 0 \quad \text{на } \Omega, \end{aligned}\right. \tag{3.32}$$

$$2\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (u^0, u)_{\mathbb{R}^N}\, dx\, dt \geq \int_0^T \left\langle u, \overline{\psi}\right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2));H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2))}\, dt \tag{3.33}$$

для будь-якого $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_2))$.

Доведення. Перш за все слід зазначити, що згідно з тоеремою 1 [2], послідовність оптимальних розв'язків $\left\{(u_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, y_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon\right\}_{\varepsilon>0}$ задач умовної оптимізації

(2.5) є компактною відносно слабкої збіжності в сенсі означення 5 [2]. Крім цього, в якості граничної пари такої послідовності виступає оптимальна пара (u^0, y^0) вихідної задачі оптимального керування. Звідси $(u^0, y^0) \in \Xi$. Далі, в результаті переходу до границі в (3.6)–(3.10), коли $\varepsilon \to 0$, отримаємо таку інтегральну тотожність:

$$\int_0^T \int_\Omega (y_0)'_t \varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, \nabla y_0 + A\nabla y_0)_{\mathbb{R}^N} \, dx \, dt =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega f\varphi \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} u_0 \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} \, dt.$$

Отже, відношення (3.31) має місце в сенсі розподілення.

Оскільки інтегральна тотожність

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, \nabla P_\varepsilon(p_\varepsilon) + A\nabla P_\varepsilon(p_\varepsilon))_{\mathbb{R}^N} \chi_{\Omega_\varepsilon} \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega (P_\varepsilon(p_\varepsilon))'_t \varphi \chi_{\Omega_\varepsilon} \, dx \, dt =$$

$$= -2 \int_0^T \int_\Omega (y_0 - y_d)\varphi \chi_{\Omega_\varepsilon} \, dx \, dt, \quad \forall \, \varphi \in C^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega)) \quad (3.34)$$

має місце для кожного $\varepsilon > 0$, то можна перейти до границі в (3.34), коли $\varepsilon \to 0$. Далі, використовуючи сильну збіжність $\chi_{\Omega_\varepsilon} \to \chi_\Omega$ in $L^2(\Omega)$ (твердження 1 [2]), отримаємо рівність

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, \nabla\overline{\psi} + A^t \nabla\overline{\psi})_{\mathbb{R}^N} \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega (\overline{\psi})'_t \varphi \, dx \, dt =$$

$$= -2 \int_0^T \int_\Omega (y_0 - y_d)\varphi \, dx \, dt, \quad \forall \, \varphi \in C^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega)). \quad (3.35)$$

Отже, $\overline{\psi} \in D \subset L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ і $\overline{\psi}$ задовольняє співвідношення (3.32). Нарешті, перейшовши до границі в (3.18), коли $\varepsilon \to 0$ і врахувавши вищесказане, отримаємо нерівність (3.33). □

Бібліографічні посилання

1. *Горбонос С.О.* Варіаційні розв'язки задачі оптимального керування з необмеженими коефіцієнтами / С.О. Горбонос, П.І. Когут // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — 2013. — Вип. 5. — № 8. — С. 69–83.

2. *Горбонос С.А.* Об аппроксимации решений одного класса задач оптимального управления для параболического уравнения с неограниченными коэффициентами / С.А. Горбонос // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2014. — Вып. 5. —- С.15–29
3. *Gorbonos S. O.* On Pathological Solutions to an Optimal Boundary Control Problem for Linear Parabolic Equation / S. O. Gorbonos, P. I. Kogut // Сборник научных трудов «Кибернетика и вычислительная техника». — 2014. — Вып. 176. — С. 5–18.
4. *Kogut P. I.* On attainability of optimal solutions for linear elliptic equations with unbounded coefficients /P. I. Kogut, O. P. Kupenko// Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — 2012. — Вип. 4. — № 8. — С. 63–82.
5. *Ioffe A. D.* Theory of Extremal Problems / A. D. Ioffe, V. M. Tichomirov. — North-Holland, Amsterdam–New York, 1979.
6. *Lions J.-L.* Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications/ J.-L. Lions, E. Magenes. — Springer-Verlag, Berlin, 1972.
7. *Cioranescu D.* An Introduction to Homogenization/ D. Cioranescu, P. Donato. — Oxford University Press, New York, 1999.
8. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков — Новосибирск : Научная книга, 1999. —- 350 с.
9. *Gilbarg D.* Elliptic partial differential equations of second order/ D. Gilbarg, N. S. Trudinger. — Springer-Verlag, Berlin, 2000.

Надійшла до редколегії 20.04.2016